Лекция 3

МЕТОДЫ РИТЦА, ГАЛЕРКИНА И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Обратимся к построению приближенных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Начнем с задачи (1.1), (1.2). Как было установлено на предыдущей лекции, решение этой задачи эквивалентно отысканию функции $u(x)\in H_0^1(I)$, минимизирующей функционал (2.8), т.е. задаче (2.9). Тем самым, построив метод приближенной минимизации этого функционала, мы будем иметь и метод приближенного решения задачи (1.1), (1.2). Для приближенной минимизации функционала (2.8) или, что в силу (2.10), (2.11) то же самое, функционала (2.13), воспользуемся методом Ритца. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы минимизировать функционал не на всем пространстве, где он задан, а только на некотором конечномерном подпространстве этого пространства.

1. Методы Ритца и Галеркина

Пусть V^n — подпространство пространства $H_0^1(I)$ размерности n: $V^n \subset H_0^1(I)$, $\dim V^n = n$.

Определение 1. Назовем приближенным решением по *методу Ритца (ритцевским решением)* задачи (2.9) (и задачи (1.1), (1.2)) такую функцию

$$u^n(x) \in V^n : \qquad J(u^n) = \min_{v^n\in V^n} J(v^n). \tag{1}$$

Чтобы реализовать метод (1), введем в V^n *базис* (он существует как в любом конечномерном пространстве), элементы которого обозначим через $\varphi_j(x), j = 1, ..., n$. Любой элемент $v^n(x) \in V^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации $\{\varphi_j\}_1^n$. Пусть $u^n(x) \in V^n$ доставляет минимум функционалу (2.13) на V^n. Разложим $u^n(x)$ по элементам базиса

$$u^n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x) \tag{2}$$

и подставим это разложение в (2.13); в результате получим квадратичную функцию n переменных $c_1, ..., c_n$:

$$J(u^n) = \frac{1}{2} a(u^n, u^n) - l(u^n) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a(\varphi_j, \varphi_l) c_j c_l - \sum_{j=1}^{n} l(\varphi_j) c_j. \tag{3}$$

Выберем коэффициенты c_j так, чтобы функция (3) принимала минимальное значение. Как известно из математического анализа, функция (3) достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial J(u^n)}{\partial c_k} = 0, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Эти производные легко вычисляются

$$\frac{\partial J(u^n)}{\partial c_k} = \sum_{l=1}^{n} a(\varphi_k, \varphi_l) c_l - l(\varphi_k).$$

Приравнивая их нулю, получим *систему Ритца*:

$$\sum_{l=1}^{n} a(\varphi_k, \varphi_l) c_l - l(\varphi_l) = 0, \qquad k = 1, ..., n, \tag{4}$$

которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_j из разложения (2). Найдя коэффициенты c_j из решения системы (4) и подставив их в (2), получим элемент $u^n(x)$, который и будет приближенным решением задачи (1.1), (1.2).

К построению приближенного решения задачи (1.1), (1.2) можно подойти и несколько иначе. Воспользуемся тем, что решение этой задачи эквивалентно отысканию решения вариационного уравнения (2.15). Будем искать приближенное решение как такой элемент $u^n(x) \in V^n$, который удовлетворяет уравнению (2.15) при любой $v^n(x) \in V^n$.

Определение 2. Назовем приближенным решением *по методу Галеркина (галеркинским решением)* задачи (2.15) (и задачи (1.1),(1.2)) функцию

$$u^n(x) \in V^n: \qquad a(u^n, v^n) = l(v^n) \qquad \forall v^n \in V^n. \tag{5}$$

Раскладывая решение $u^n(x)$ задачи (5) по базису $\{\varphi_j\}_1^n$ пространства V^n в виде (2) и полагая в (5) функцию $v^n(x)$ последовательно равной $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, для определения коэффициентов разложения c_j снова получим систему (4).

Если билинейная форма $a(u, v)$ симметрична, как в рассматриваемом нами случае (2.10), то метод Ритца и метод Галеркина приводит к одному и тому же приближенному решению. Если $a(u, v)$ несимметрична, то метод Ритца вообще неприменим, ибо в этом случае исходная краевая задача не допускает эквивалентной формулировки в виде задачи о минимизации функционала. Метод же Галеркина применим и в этом случае, если вариационная формулировка задачи существует.

Замечание 1. Приближенное по Ритцу–Галеркину решение $u^n(x)$ удовлетворяет тому же самому вариационному уравнению (2.14), что и точное решение задачи. Разница состоит лишь в том, что точное решение расположено в $H_0^1(I)$ и (2.14) должно выполнятся на *всех* функциях $v(x) \in H_0^1(I)$, а приближенное решение ищется в $V^n \in H_0^1(I)$ и (2.14) удовлетворяется только на $v^n \in V^n$ (см. (5)).

Исследуем вопрос о разрешимости *системы Ритца–Галеркина* (4). Покажем, что при выполнении условий (1.3) система (4) с $a(u, v)$ из (2.10), как и ее прообраз — задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Обозначим через

$$A = [a(\varphi_k, \varphi_l)]_1^n \tag{6}$$

матрицу системы (4).

Теорема 1. *Если билинейная форма $a(u,v)$ симметрична и положительно определена, то матрица A системы Ритца–Галеркина (6) также симметрична и положительно определена.*

Доказательство. Симметрия матрицы A из (6) есть следствие симметрии билинейной формы $a(u,v)$, в силу которой $a(\varphi_k,\varphi_l) = a(\varphi_l,\varphi_k)$. Докажем положительную определенность (а, следовательно, и невырожденность) матрицы A. Пусть $v^n = \sum_{j=1}^{n} b_j\varphi_j$ — произвольный элемент из V^n , а $\boldsymbol{b} = [b_1,...,b_n]^T$ — вектор его коэффициентов. Так как

$$\boldsymbol{b}^T A\boldsymbol{b} = \sum_{k,l=1}^{n} a(\varphi_k,\varphi_l)b_k b_l = a\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k, \sum_{l=1}^{n} b_l\varphi_l\right) = a(v^h,v^h) > 0,$$

то положительная определенность A установлена. □

Неотрицательность билинейной формы (2.10) при выполнении условий (1.3) мы уже отмечали в предыдущей лекции (см.(2.12)), а положительность будет доказана в лекции 11.

Итак, система (4) однозначно разрешима.

Ну а как реально выбирать V^n ? В решении этого вопроса и расходятся классические методы Ритца и Галеркина с методом конечных элементов. При классическом подходе в качестве пространства V^n обычно берутся пространства алгебраических или тригонометрических многочленов конечной степени или какие-либо другие совокупности функций, заданных на I и удовлетворяющих главным граничным условиям.

Удовлетворение главным граничным условиям — одна из проблем классического подхода к методам Ритца и Галеркина для уравнений с частными производными при сколь-нибудь сложной форме области, ибо построение подпространств V^n, содержащих функции, для которых выполнены главные граничные условия на криволинейной границе, — не такое простое дело. (Разумеется, этой проблемы не существует в рассматриваемом нами сейчас одномерном случае.)

Вторая проблема классического подхода — трудность составления системы Ритца–Галеркина, связанная с тем, что коэффициенты этой системы выражаются через интегралы, вычисление которых, особенно при двух и большем числе независимых переменных, требует большой затраты труда.

Если базис в V^n выбран не слишком удачно (например, в рассматриваемом нами случае $\varphi_i = (1-x)x^i, \quad i = 1, ..., n$, а V^n —линейная оболочка φ_i), то матрица системы Ритца-Галеркина становится плохо обусловленной, что приводит к накоплению большой вычислительной погрешности при решении системы (4).

Плотная заполненность матрицы системы Ритца-Галеркина (отсутствие большого числа нулевых элементов) создает дополнительные трудности при решении системы, связанные с большой затратой труда.

Все эти проблемы в значительной степени удается решить при конечноэлементной реализации методов Ритца и Галеркина.

2. Пространство конечных элементов

Основная идея, отличающая *метод конечных элементов* (МКЭ) от других реализаций методов Ритца и Галеркина, состоит в следующем: область, в которой требуется найти решение краевой задачи, разбивается на подобласти простой формы, называемые *конечными элементами*, а в качестве пространства V^n, в котором ищется приближенное решение, берется пространство так называемых "кусочных" функций, определяемых по-своему на каждом конечном элементе и представляющих собой там достаточно простые функции, например, многочлены низкой степени.

Чтобы получить такое кусочное пространство, мы должны сначала разбить область (в нашем случае отрезок $\overline{I} = [0, 1]$) на конечное число элементов. На рис. 1 в качестве примера изображен отрезок $\overline{I}$, разбитый на три элемента $e^{(i)}, i = 1, 2, 3$ одинаковой длины $h = 1/3 = \operatorname{mes} e^{(i)}$. Каждому элементу сопоставляются принадлежащие ему выделенные точки,

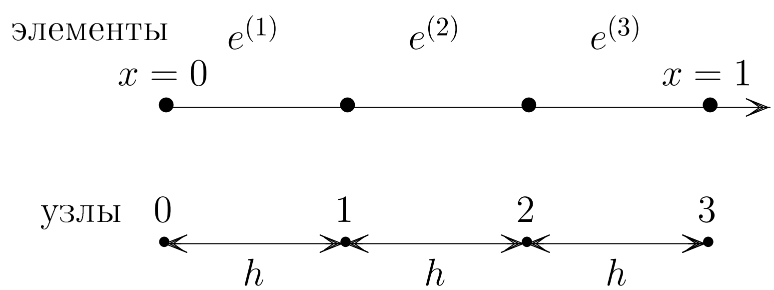

Рис. 1

называемые *узлами*, которые играют важную роль в конечноэлементных конструкциях — они используются при параметризации конечноэлементного пространства. В примере, изображенном на рис. 1, узлами являются концы элементов. Их четыре и пронумерованы они числами $0, 1, 2, 3$. Обозначим координаты этих узлов через $x_i = ih$. Тогда

$$e^{(i)} = \{x | \, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Совокупность элементов и узлов иногда называют *конечноэлементной сеткой*.

Очевидно, что простейшим кусочным пространством является пространство кусочно-постоянных функций, постоянных на каждом элементе. Одна из таких функций изображена на рис. 2. Здесь вертикальными черточками обозначены границы элементов, а жирными точками — узлы. Однако для целей приближенного решения рассматриваемой нами краевой задачи (1.1), (1.2) это пространство не подходит, ибо кусочно-постоянные функции разрывны (см. рис. 2), в то время как для использования в методах Ритца и Галеркина конечноэлементное пространство должно быть подпространством $H^1(I)$, любая функция которого, как будет показано в лекции 11, непрерывна.

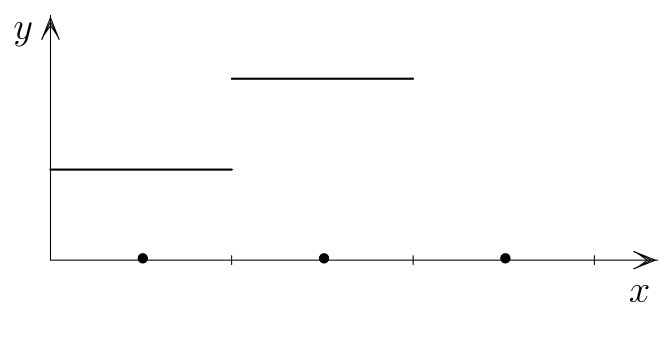

Рис. 2

Следующим по сложности кусочным пространством является пространство кусочно-линейных, линейных на каждом элементе функций. Нас будут интересовать только подпространства непрерывных функций из этого пространства (см. рис. 3). Ясно, что пространство кусочно-линейных непрерывных функций является подпространством $H^1(I)$, ибо производная кусочно-линейной непрерывной функции есть кусочно-постоянная функция и обе эти функции имеют интегрируемый квадрат.

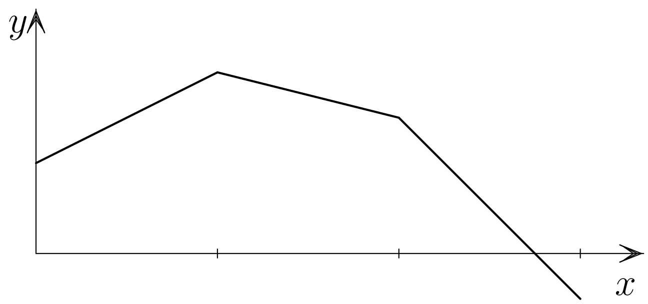

Рис. 3

Какова размерность этого пространства? Если отрезок I разбит на N элементов, а для задания линейной функции на каждом элементе требуется определение двух параметров, то размерность пространства кусочно-линейных (не непрерывных) функций есть $2N$. Так как нас интересуют непрерывные функции, то израсходовав $(N-1)$ параметров на удовлетворение условий непрерывности в общих для пары элементов узлах (в узлах 1 и 2 на рис. 1), находим, что размерность пространства кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций есть $2N-(N-1)=N+1$. Если нас интересует подпространство $H^1_0(I)$ пространства $H^1(I)$, то мы должны потребовать, чтобы кусочно-линейные функции обращались в нуль при $x=0$ и $x=1$. На это уйдет еще два параметра, так что размерность пространства кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе и обращающихся в нуль на концах отрезка I функций есть $(N-1)$.

Обозначим через

$$S_1^h := \left\{ v^h(x) \in C(\overline{I}) |\ v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_1(e^{(i)}), \quad i=1,...,N \right\} \tag{8}$$

пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций, которое будем называть *конечноэлементным пространством*. Здесь $v^h(x)\,|_{e(i)}$ обозначает сужение функции $v^h(x)$, заданной на $\overline{I}$, на элемент $e^{(i)}$, а $P_k(e^{(i)})$ — сужение на элемент $e^{(i)}$ пространства многочленов не выше k-ой степени. Как уже отмечалось, $S_1^h \subset H^1(I)$ и если отрезок I разбит на N элементов одинаковой длины $h = 1/N$, то размерность S_1^h , обозначаемая $\dim S_1^h = N + 1 = 1/h + 1$.

Обозначим

$$\overset{\circ}{S}{}_1^h := \{v^h(x) \in S_1^h \mid v^h(0) = v^h(1) = 0\}.$$

Очевидно, что $\overset{\circ}{S}{}_1^h \subset H_0^1(I)$, а $\dim \overset{\circ}{S}{}_1^h = N - 1$.

Построим базисы в S_1^h и $\overset{\circ}{S}{}_1^h$. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \tag{9}$$

Эта функция изображена на рис. 4; она кусочно-линейна и непрерывна. Тогда сужения на I функций

$$\varphi_i(x) = \hat{\varphi}\left(\frac{x}{h} - i\right), \quad i = 0, 1, ..., N \tag{10}$$

линейно-независимы и могут быть приняты за *базис* в S_1^h. Вид функций

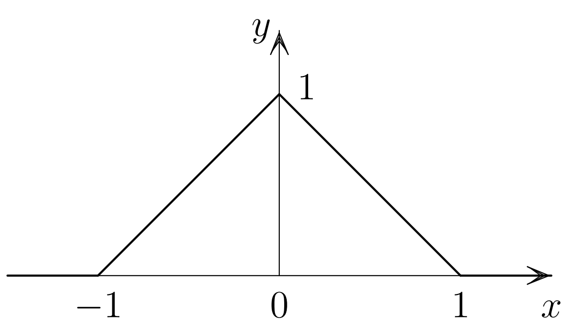

Рис. 4

φ_i при $N = 3$ изображен на рис. 5.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_N(x)$ не принадлежат $\overset{\circ}{S}{}_1^h$ так как $\varphi_0(0) = 1$, а $\varphi_N(1) = 1$. Исключая их из совокупности (10), находим, что оставшихся функций в (10) ровно столько, сколько необходимо для базиса в $\overset{\circ}{S}{}_1^h$.

Отметим два важных свойства введенного базиса(10),(9):

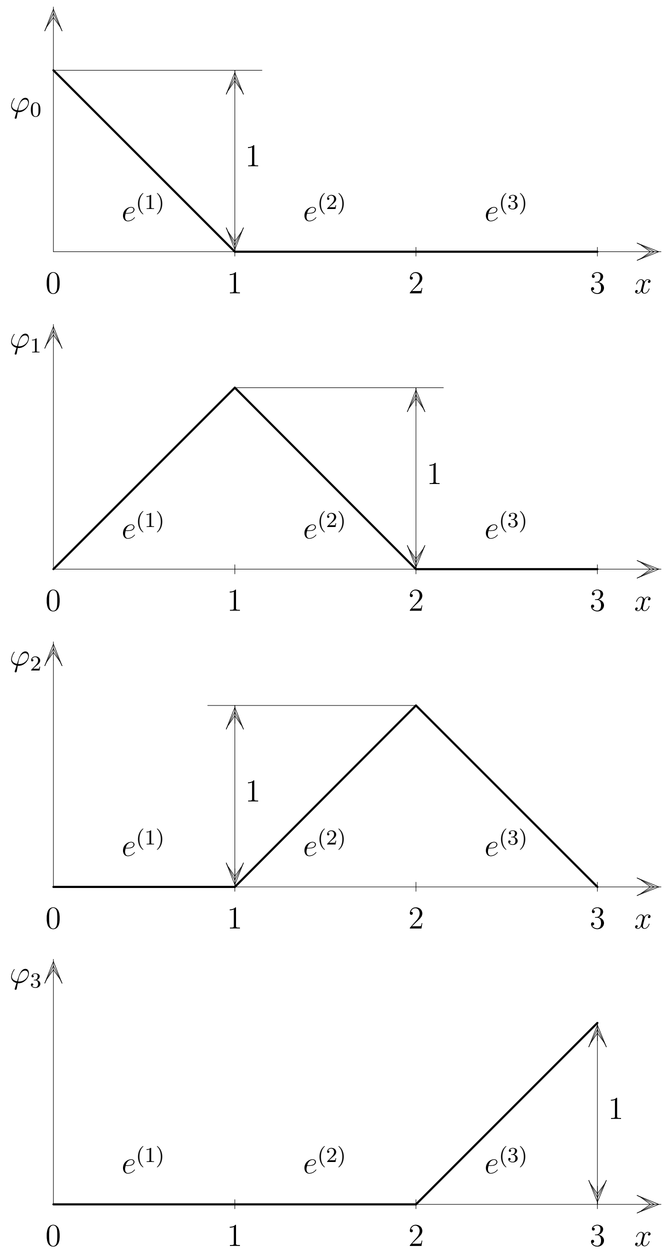

Рис. 5

1. *Каждая базисная функция $\varphi_i(x)$ отлична от нуля лишь в одном узле конечноэлементной сетки, и ее значение в этом узле равно единице.*

2. *Носитель каждой базисной функции $\varphi_i(x)$ минимален.*

Если $v^h(x) \in S_1^h$—произвольная функция и $v^h(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j\varphi_j(x)$—ее разложение по базису, то в силу первого свойства $v^h(x_i) = c_i$, т.е. *ко-*

эффициенты разложения по базису — суть значения этой функции в узлах конечноэлементной сетки.

Следствием второго свойства является обращение в нуль большинства произведений базисных функций. Именно, $\varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0$ при $|i-j| \geqslant 2$. Тем самым, если ввести скалярное произведение в S_1^h, то *каждая из базисных функций будет ортогональна большинству остальных.* Функция φ_0 не будет ортогональна только φ_1, функция φ_N не будет ортогональна только φ_{N-1} , а $\varphi_i, \quad i = 1, ..., N-1$, не будет ортогональна только φ_{i-1} и φ_{i+1}. Это свойство базисных функций особенно ценно с точки зрения построения матрицы системы Ритца–Галеркина, ибо в этом случае матрица будет иметь очень много нулевых элементов и отпадает необходимость вычислять те из них, которые заведомо равны нулю.

3. Конечноэлементная аппроксимация

Применим метод Галеркина к решению задачи (1.1), (2.21) с использованием конечноэлементного пространства S_1^h, определяемого соотношением (8).

Напомним вариационную формулировку этой задачи: среди функций пространства $\tilde{H}^1(I)$, определяемого соотношением (2.25), найти такую функцию $u(x)$, которая при любых $v \in \tilde{H}_1(I)$ удовлетворяет уравнению $a(u,v) = l(v)$ (здесь мы ввели новые обозначения, опустив индексы "1"у билинейной и линейной форм), где согласно формулам (2.23), (2.24), (2.10), (2.11)

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1), \\ l(v) &= \int_0^1 fvdx + gv(1). \end{aligned} \tag{11}$$

Более коротко сказанное можно записать так: найти

$$u(x) \in \tilde{H}^1(I): \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I). \tag{12}$$

Введем в рассмотрение пространство

$$\tilde{S}_1^h := \{v^h(x) \in S_1^h | \ v^h(0) = 0\}, \tag{13}$$

где S_1^h определяется соотношением (8). Очевидно, что $\tilde{S}_1^h \in \widetilde{H}^1(I)$, $\dim \tilde{S}_1^h = N$, а базис в нем определяют функции (10), (9) с $i = 1, 2, \ldots, N$.

Конечноэлементное решение $u^h(x)$ задачи (12), являющееся галеркинским решением этой задачи, согласно (5) определяется из условий:

$$u^h(x) \in \tilde{S}_1^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \tag{14}$$

Отсюда приходим к системе уравнений

$$\sum_{l=1}^{N} a(\varphi_l, \varphi_k) u_l - l(\varphi_k) = 0, \quad k = 1, ..., N, \tag{15}$$

где через u_l (вместо c_l) обозначены коэффициенты разложения приближенного решения $u^h(x) \in \tilde{S}_1^h$ по базису, т.е. $u^h(x) = \sum_{l=1}^{n} u_l \varphi_l(x)$. Такое переобозначение становится вполне естественным$^{*)}$, если принять во внимание первое свойство базисных функций (10), (9), в силу которого u_j является значением $u^h(x)$ в узле сетки, т.е. $u^h(x_j) = u_j$.

Принимая во внимание второе свойство базисных функций, находим, что $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $|i - j| > 1$ и, следовательно, система (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a(\varphi_1, \varphi_1) u_1 + a(\varphi_1, \varphi_2) u_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= l(\varphi_1), \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) u_{i-1} + a(\varphi_i, \varphi_i) u_i + a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) u_{i+1} &= l(\varphi_i),\ i = 2, ..., N-1, \\ a(\varphi_N, \varphi_{N-1}) u_{N-1} + a(\varphi_N, \varphi_N) u_N &= l(\varphi_N). \end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что матрица системы (16) имеет лишь три ненулевых диагонали и в этом отношении близка к матрице системы уравнений метода конечных разностей.

$^{*)}$Более естественным было бы вместо u_j писать u_j^h, имея в виду, что речь идет о значениях в узлах приближенного решения. Однако верхний индекс h мы предпочитаем не писать из-за чрезмерной громоздкости получающихся выражений. Чтобы не путать u_j со значениями точного решения $u(x)$ в узлах сетки для последних будем использовать только обозначение $u(x_j)$ и помнить, что $u(x_j) \neq u_j = u^h(x_j)$.

Вычислим ее коэффициенты. С учетом (9)-(11), имеем:

$$a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p\varphi_i'\varphi_{i+1}' + q\varphi_i\varphi_{i+1}]\,dx,$$
$$a(\varphi_i,\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[p(\varphi_i')^2 + q\varphi_i^2\right] dx, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$
$$a(\varphi_N,\varphi_N) = \int_{1-h}^{1} \left[p(\varphi_N')^2 + q\varphi_N^2\right] dx + \varkappa,$$

а

$$l(\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx, \quad i = 1, \dots, N-1, \qquad l(\varphi_N) = \int_{1-h}^{1} f\varphi_N dx + g.$$

Преобразуем эти формулы путем замены переменной интегрирования

$$t = \frac{x - x_i}{h} = \frac{x}{h} - i.$$

Для всякой функции $g(x)$ будем писать $g(x) = g(ht + x_i) = \hat{g}_i(t)$.

Принимая во внимание (10), (9), находим, что

$$\frac{d}{dx}\varphi_i(x) = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{h}\begin{cases} 1, & -1 < t < 0, \\ -1, & 0 < t < 1, \end{cases}$$
$$\frac{d}{dx}\varphi_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}\hat{\varphi}(\frac{x}{h} - i - 1) = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(t-1) = \frac{1}{h}, \quad 0 < t < 1,$$

и, следовательно,

$$a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) = \int_0^1 \left[-\frac{1}{h}\hat{p}_i(t) + h\hat{q}_i(t)\hat{\varphi}(t)\hat{\varphi}(t-1)\right] dt,$$
$$a(\varphi_i,\varphi_i) = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h}\hat{p}_i(t) + h\hat{q}_i(t)\hat{\varphi}^2(t)\right] dt, \quad i = 1, ..., N-1,$$
$$a(\varphi_N,\varphi_N) = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{h}\hat{p}_N(t) + h\hat{q}_N(t)\hat{\varphi}^2(t)\right] dt + \varkappa, \tag{17}$$
$$l(\varphi_i) = h\int_{-1}^1 \hat{f}_i(t)\hat{\varphi}(t)dt, \quad i = 1, ..., N-1,$$
$$l(\varphi_N) = h\int_{-1}^0 \hat{f}_N(t)\hat{\varphi}(t)dt + g.$$

Вычисления можно еще несколько продвинуть, если предположить, что $p(x) \equiv p = \text{const}$, $q(x) \equiv q = \text{const}$, $f(x) \equiv f = \text{const}$. Так как

$$\int_0^1 \hat\varphi(t)\hat\varphi(t-1)dt = \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6}, \int_{-1}^1 \hat\varphi^2(t)dt = 2\int_0^1 \hat\varphi^2(t)dt = \frac{2}{3},$$

а

$$\int_{-1}^1 \hat\varphi(t)dt = 1,$$

то отсюда и из (17) находим, что

$$\begin{aligned} &a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}, \quad a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}, \quad i = 1, ..., N-1, \\ &a(\varphi_N, \varphi_N) = \frac{p}{h} + \frac{hq}{3} + \varkappa, \\ &l(\varphi_i) = hf, \quad i = 1, ..., N-1, \quad l(\varphi_N) = \frac{h}{2}f + g. \end{aligned} \tag{18}$$

С учетом (18) система (16) принимает вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}\right)u_1 + \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right)u_2 &= hf, \\ \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right)u_{i-1} + \left(\frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}\right)u_i + \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right)u_{i+1} &= hf, \\ i = 2, ..., N-1,& \\ \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right)u_{N-1} + \left(\frac{p}{h} + \frac{hq}{3} + \varkappa\right)u_N &= g + \frac{h}{2}f. \end{aligned} \tag{19}$$

Преобразуем эту систему, поделив первые $(N-1)$ уравнений на h. Несколько перегруппировав слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned} -\left(p - \frac{h^2q}{6}\right)\frac{1}{h}\left[\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right] + qu_i = f, \quad i = 1, 2, ..., N-1, \\ \left(p - \frac{h^2q}{6}\right)\frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \left(\varkappa + \frac{hq}{2}\right)u_N = g + \frac{h}{2}f, \end{aligned} \tag{20}$$

где u_0 — новая неизвестная, определяемая уравнением $u_0 = 0$, которое можно рассматривать как аппроксимацию первого из граничных условий

(2.21). Тогда первые $(N-1)$ уравнений (20) представляют собой аппроксимацию уравнения (1.1), а последнее из уравнений (20) — аппроксимацию второго из граничных условий (2.21).

4. Неоднородные граничные условия первого рода

Пусть главное граничное условие из (2.21) является неоднородным

$$u(0) = \overline{g}. \tag{21}$$

Для того, чтобы сформулировать вариационную задачу, отвечающую дифференциальной задаче (1.1), (2.21),(21), введем аффинное многообразие

$$\widetilde{H}^1_E(I) := \left\{ v \in H^1(I) \;\middle|\; v(0) = \overline{g} \right\}.$$

Тогда интересующая нас вариационная задача примет вид: найти

$$u \in \widetilde{H}^1_E(I): \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall\, v \in \widetilde{H}^1(I),$$

где $a(u,v)$ и $l(v)$ те же, что и для задачи (1.1), (2.21), и задаются соотношениями (11). Приближенное решение теперь нужно искать среди функций $\widetilde{H}^1_E(I) \bigcap S^h_1$, т.е.

$$u^h \in \widetilde{H}^1_E(I) \bigcap S^h_1: \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall\, v^h \in \widetilde{S}^h_1. \tag{22}$$

Замечание 2. Очевидно, что задача (22) эквивалентна следующей задаче: найти $u^h \in S^h_1$ такую, что

$$u^h(0) = \overline{g}, \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall\, v^h \in \widetilde{S}^h_1. \tag{23}$$

Из (23) следует, что $u^h(x) = \overline{g}\varphi_0(x) + \tilde{u}^h(x)$, где

$$\tilde{u}^h(x) \in \widetilde{S}^h_1: \quad a(\tilde{u}^h, v^h) = l(v^h) - \overline{g}a(\varphi_0, v^h) \quad \forall\, v^h \in \widetilde{S}^h_1.$$

Поскольку $\tilde{u}^h = \sum\limits_{l=1}^{N} u_l \varphi_l(x)$, где $u_l = u^h(x_l) = \tilde{u}^h(x_l)$, то для отыскания u_l имеем систему (15) с заменой первого уравнения на уравнение

$$\sum_{l=1}^{N} a(\varphi_l, \varphi_1) u_l - l(\varphi_1) + \overline{g}a(\varphi_0, \varphi_1) = 0.$$

5. Упражнения

1. Показать, что если коэффициенты разложения (2) являются решением системы (4), то (2) удовлетворяет (5).

2. Найти галеркинское из V^2 решение задачи

$$-u'' = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \tag{21}$$

где V^2 есть линейная оболочка функций x и x^2 .

3. Найти галеркинское из V^3 решение задачи

$$-u'' = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где V^3 есть линейная оболочка функций $\sin(k\pi x)$ при $k = 1, 2, 3$.

4. Показать, что система функций (10),(9) линейно-независима.

5. Найти конечноэлементное из $\tilde{S}_1^h$ решение задачи (21), где $\tilde{S}_1^h$ — пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на $[0, \frac{1}{2}]$ и на $[\frac{1}{2}, 1]$ функций.

6. Рассматривая систему уравнений (19) как разностную схему, аппроксимирующую задачу (1.1), (2.21) с постоянными коэффициентами, показать, что ее погрешность аппроксимации есть $O(h^2)$ как для уравнения, так и для граничного условия.

7. Установить то же самое, что и в задаче 6, для системы (16), (17). (В случае переменных коэффициентов.)